部分分数分解

有理関数$\dfrac{Q(x)}{P(x)}$($Q(x)$は$P(x)$より低次の多項式)を

$\dfrac{A}{(x-a)^m}$，$\dfrac{Bx+C}{(x^2+bx+c)^n}$の形の分数の和で表すことを,

$\dfrac{Q(x)}{P(x)}$の部分分数分解という。

A,B,C,a,b,cは定数，x^2+bx+cは実数の範囲で因数分解できない($b^2-4c<0$)とする。
主な使用目的:有理関数の積分,
色々な有理関数を部分分数分解した形を以下に示す。
ただし，A_i，B_i，C_i, a_iで表された文字は数列ではなく,ただの定数です。

1．分母が互いに異なる 1 次式の積形の場合

$\dfrac{Q(x)}{P(x)}=\dfrac{Q(x)}{(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n)}$を部分分数分解した形は,

$$\frac{Q(x)}{P(x)}=\frac{A_1}{x-a_1}+\frac{A_2}{x-a_2}+\cdots+\frac{A_n}{x-a_n}$$

2．分母が$(x-\alpha)^n$ $(n\geq 2)$および互いに異なる 1 次式の積形の場合

$\dfrac{Q(x)}{P(x)}=\dfrac{Q(x)}{(x-a_1)^n(x-a_2)\cdots(x-a_n)}$を部分分数分解した形は,

$$\frac{Q(x)}{P(x)}=\frac{A_n}{(x-a_1)^n}+\frac{A_{n-1}}{(x-a_1)^{n-1}}+\cdots+\frac{A_1}{x-a_1}+\frac{B_2}{x-a_2}+\frac{B_3}{x-a_3}+\cdots+\frac{B_n}{x-a_n}$$

3．分母がx^2+bx+cおよび互いに異なる 1 次式の積形の場合

$\dfrac{Q(x)}{P(x)}=\dfrac{Q(x)}{(x^2+bx+c)(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n)}$を部分分数分解した形は,

$$\frac{Q(x)}{P(x)}=\frac{Bx+C}{x^2+bx+c}+\frac{A_1}{x-a_1}+\frac{A_2}{x-a_2}+\cdots+\frac{A_n}{x-a_n}$$

4．分母が$(x^2+bx+c)^n$ $(n\geq 2)$，$(x-\alpha)^m$ $(m\geq 2)$および互いに異なる 1 次式の積形の場合

$\dfrac{Q(x)}{P(x)}=\dfrac{Q(x)}{(x^2+bx+c)^n(x-a_1)^m(x-a_2)\cdots(x-a_l)}$を部分分数分解した形は,

$$\begin{aligned}\frac{Q(x)}{P(x)}&=\frac{B_nx+C_n}{(x^2+bx+c)^n}+\frac{B_{n-1}x+C_{n-1}}{(x^2+bx+c)^{n-1}}+\cdots+\frac{B_1x+C_1}{x^2+bx+c}\\&+\frac{A_m}{(x-a_1)^m}+\frac{A_{m-1}}{(x-a_1)^{m-1}}+\cdots+\frac{A_1}{x-a_1}\\&+\frac{B_2}{x-a_2}+\cdots+\frac{B_l}{x-a_l}\end{aligned}$$

補足

部分分数分解 $\dfrac{1}{(x-1)(x+2)^2}=\dfrac{A}{x-1}+\dfrac{B}{x+2}+\dfrac{C}{(x+2)^2}$ において，

$\dfrac{C}{(x+2)^2}$ の分母が 2 次式であるのに，分子が 1 次式ではなく，定数 C となる理由

$$\begin{aligned}\frac{1}{(x-1)(x+2)^2}&=\frac{a}{x-1}+\frac{bx+c}{(x+2)^2}\\&=\frac{a}{x-1}+\frac{b(x+2)-2b+c}{(x+2)^2}\\&=\frac{a}{x-1}+\frac{b}{x+2}+\frac{-2b+c}{(x+2)^2}\\&=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+2}+\frac{C}{(x+2)^2}\end{aligned}$$

という風に処理したからである。

おまけ

分母が階乗の部分分数展開

$$\frac{n}{(n+1)!}=\frac{(n+1)-1}{(n+1)!}=\frac{1}{n!}-\frac{1}{(n+1)!}$$